Jochen Weber

Aufgaben zu Parabeln

1.0 Die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S und den auf ihr liegenden Punkten P und Q.
Ermitteln Sie jeweils die Werte der Formvariablen a, b und c.

1.1 a = 4; S(-2/-5)
1.2 c = -2; P(2/3); Q(-1/4)
1.3 a = 2; P(4/0); b = c
1.4 b = 2; S(3/5)

2.0 Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Parabeln.

2.1 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ 2.2 $y=3x^2-4x+2{,}5$ 2.3 $y=2x^2+6x+4{,}5$

3.0 Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die die Koordinatenachsen in den Punkten schneidet.

3.1 A(0/-16), B(2/0) und C(-4/0)
3.2 A(0/-1), B(5/0) und C(-1/0)

4.0 Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Funktionen.

4.1 $p_1: y=x^2+2$ und $p_2: y=x^2-2x+5$

4.2 $p_1: y=x^2-3x$ und $p_2: y=-x^2+x+6$

5.0 Von einer quadratischen Funktion sind der Leitkoeffizient a und die Nullstellen bekannt. Geben Sie die Funktionsgleichung in der Produktform, der allgemeinen Form und der Scheitelpunktform an.

5.1 $a=1;\ \ x_1=-1;\ \ x_2=3$

5.2 $a=1{,}5;\ \ x_1=1;\ \ x_2=5$

5.3 $a=-2;\ \ x_1=2;\ \ x_2=2$

5.4 $a=\frac{2}{3};\ \ x_1=1{,}5;\ \ x_2=7{,}5$

6.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt.

6.1 Wenn die Nullstellen einer quadratischen Funktion sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, ist die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse.

6.2 Wenn die Parabel die x-Achse berührt, hat der Scheitelpunkt den x-Wert 0.

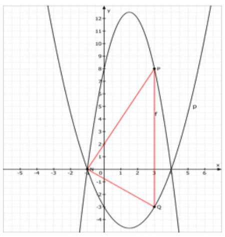
6.3 Wenn eine Parabel zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat und nach oben geöffnet ist, hat der Scheitelpunkt einen negativen y-Wert.

6.4 Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, lässt sich die Funktionsgleichung nicht in der Produktform angeben.

7.0 Gegeben sind die quadratische Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$ und die quadratische Funktion p mit $p(x) = 0{,}75x^2 - 2{,}25x - 3$.

7.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der zugehörigen Parabeln.

7.2 Die Gerade g mit $g(x) = 2x + 2$ schneidet den Graphen von f im Punkt P. Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von p und hat die gleiche x-Koordinate wie der Punkt P.
Die Punkte N(-1/0), P und Q bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks.



8 Gegeben sind die lineare Funktion $g: x \mapsto -\frac{4}{3}x + 8$ und eine quadratische Funktion p mit den Definitionsmengen $D_g = D_p = \mathbb{R}$. Die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Koordinatenachsen des Koordinatensystems liegen auf der Parabel G_p. Einer dieser Punkte ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel G_p.
Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung der quadratischen Funktion p.
(Abitur 2022 Teil 1)

Lösungen

1.1 $y = 4x^2 + bx + c$

$y = 4(x+2)^2 - 5 = 4(x^2 + 4x + 4) - 5 = 4x^2 + 16x + 16 - 5 = 4x^2 + 16x + 11$

$\Rightarrow b = 16 \qquad c = 11$

1.2 $y = ax^2 + bx - 2$

$P(2/3) \Rightarrow 3 = 4a + 2b - 2 \Rightarrow 5 = 4a + 2b$

$Q(-1/4) \Rightarrow 4 = a - b - 2 \Rightarrow 6 = a - b$

(I) $5 = 4a + 2b$

(II) $6 = a - b \qquad \Rightarrow a = 6 + b$

$a = 6 + b$ in (I): $5 = 4(6+b) + 2b \quad \Rightarrow 5 = 24 + 4b + 2b \quad \Rightarrow 6b = -19$

$\Rightarrow b = -\frac{19}{6}$

$\Rightarrow a = 6 - \frac{19}{6} = \frac{17}{6}$

1.3 $y = 2x^2 + bx + b$

$P(0/4) \Rightarrow 0 = 2 \cdot 16 + 4b + b \quad \Rightarrow 0 = 32 + 5b \quad \Rightarrow b = -\frac{32}{5} = -6{,}4 = c$

1.4 $y = a(x-3)^2 + 5 \quad \Rightarrow y = a(x^2 - 6x + 9) + 5 \quad \Rightarrow y = ax^2 - 6ax + 9a + 5$

$\Rightarrow -6a = 2 \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow c = 9 \cdot (-\frac{1}{3} + 5) = -3 + 5 = 2$

2.1 $N_1(2/0)$ und $N_2(-2/0)$ 2.2 keine Nullstellen 2.3 $N(-\frac{3}{2}/0)$

3.1 Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$ und dann die Punkte A,B und C einsetzen

(I) $-16 = c$

(II) $0 = 4a + 2b + c$

(III) $0 = 16a - 4b + c$

$\Rightarrow$ $a = 2$ und $b = 4$ $\Rightarrow$ $y = 2x^2 + 4x - 16$

3.2 gleicher Ansatz wie bei 3.1

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 1$

4.1 Ein Schnittpunkt: S(1,5/4,25)

4.2 Zwei Schnittpunkte: S_1(-1/4) und S_2(3/0)

5.1 $y=(x+1)(x-3)$ $\quad y=x^2-2x-3$ $\quad y=(x-1)^2-4$

5.2 $y=1,5(x-1)(x-5)$ $\quad y=1,5x^2-9x+7,5$ $\quad y=1,5(x-3)^2-6$

5.3 $y=-2(x-2)(x-2)=-2(x-2)^2$ $\quad y=-2x^2-8x-8$ $\quad y=-2(x-2)^2$

5.4 $y=\frac{2}{3}(x-1,5)(x-7,5)$ $\quad y=\frac{2}{3}x^2-6x+7,5$ $\quad y=\frac{2}{3}(x-4,5)^2-6$

6.1 Richtig.

6.2 Falsch, $y=(x-1)^2$ berührt die x-Achse und der Scheitlepunkt hat den x-Wert 1.

6.3 Richtig.

6.4 Richtig.

7.1

$$-2x^2+6x+8=0,75x^2-2,25x-3 \quad \Rightarrow -2,75x^2+8,25x+11=0$$
$$\Rightarrow x_1=4 \quad x_2=-1$$
$$y_1=0 \quad \Rightarrow S_1(4|0)$$
$$y_2=0 \quad \Rightarrow S_2(-1|0)$$

7.2

$$-2x^2+6x+8=2x+2 \quad \Rightarrow -2x^2+4x+6=0$$

$$\Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$$

$$\Rightarrow y_1=0 \quad y_2=8 \qquad \Rightarrow SP_1(-1/0) \quad P(3/8)$$

$$\Rightarrow Q(3/p(3)) \quad \Rightarrow Q(3/-3)$$

$$A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot(3-(-1))\cdot(8-(-3))=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 11=22$$

8

$$g(x) = -\frac{4}{3}x + 8$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } x-\text{Achse}: \; -\frac{4}{3}x + 8 = 0 \;\Rightarrow x = 6 \;\Rightarrow N(6|0)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } y-\text{Achse}: \; S_y(0|8)$$

$$p(x) = a(x-6)^2 \quad \Rightarrow 8 = a(0-6)^2 \;\Rightarrow 8 = 36a \Rightarrow a = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{9}(x-6)^2$$

Alternative:

$$p(x) = a\cdot x^2 + 8 \;\Rightarrow 0 = a\cdot 6^2 + 8 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 8$$